Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
Ene-Mar 2024
3$^{\text{er}}$ Examen Parcial (35 %)

Solución

Pregunta 1. (4 ptos. c/u) Calcule la derivada para cada una de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right)$ **b)** $\dfrac{\tan(x^2)\tan^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$

Solución:

a)
$$\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^2}}\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{\pi^2-4\arctan^2(x)}}$$

b)
$$\left(\frac{\tan(x^2)\tan^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\right)'$$
$$= \frac{\left(\sec^2(x^2)\,(2x)\tan^2(x)+\tan(x^2)\,2\tan(x)\sec^2(x)\right)\left(1+\operatorname{sen}(x)\right) - \tan(x^2)\tan^2(x)\cos(x)}{\left(1+\operatorname{sen}(x)\right)^2}$$

Pregunta 2. Considere la curva cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^3+y^3=6xy$

a) (2 ptos.) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ para los puntos (x,y) de la curva

b) (2 ptos.) Halle los puntos pertenecientes a la curva para los cuales la recta tangente es vertical

c) (2 ptos.) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (a, b)

Solución: Derivando implícitamente la ecuación dada, se tiene que

$$3x^2 + 3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6\left(y + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

de donde se despeja

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}$$

La recta tangente a la curva es vertical en aquellos puntos para los cuales

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = 0$$

por lo que debemos hallar los puntos pertenecientes a la curva tales que $2x - y^2 = 0$. Resolviendo el sistema,

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6xy \\ 2x - y^2 = 0 \end{cases} \implies y^3\left(y^3 - 16\right) = 0 \implies y \in \left\{0, \sqrt[3]{16}\right\}$$

se tiene que los puntos deseados son $(0, 0)$ y $\left(2^{5/3}, 2^{4/3}\right)$ ya que el valor de x se calcula a partir del valor de y reemplazando en la relación $x = y^2/2$.

Si el punto (a, b) no es ninguno de los puntos donde la recta tangente es vertical entonces la pendiente de la recta tangente viene dada por

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}\right|_{(a,b)} = \frac{a^2 - 2b}{2a - b^2}$$

Así, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (a, b) es

$$\begin{cases} y = \dfrac{a^2 - 2b}{2a - b^2}(x - a) + b & , \text{ si } (a, b) \neq (0, 0) \text{ y } (a, b) \neq \left(2^{5/3}, 2^{4/3}\right) \\ x = a & , \text{ si } (a, b) = (0, 0) \text{ o } (a, b) = \left(2^{5/3}, 2^{4/3}\right) \end{cases}$$

Pregunta 3. (4 ptos.) Halle las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

Solución: El dominio de la función es $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Estudiando la función hacia los extremos de su dominio, se tiene que:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x-3}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{-\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - {}^{3}\!/_{x}}{-\sqrt{1 - \left({}^{3}\!/_{x}\right)^2}} = -1$$

por lo que la recta $y = -1$ es asíntota horizontal de la función g para $x \to -\infty$;

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \to -3^-} \frac{-(3-x)}{\sqrt{(3-x)(-x-3)}}$$

$$= \lim_{x \to -3^-} \frac{-\left(\sqrt{3-x}\right)^2}{\left(\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{-x-3}\right)} = \lim_{x \to -3^-} \frac{-\sqrt{3-x}}{\sqrt{-x-3}} = -\infty$$

por lo que la recta $x = -3$ es asíntota vertical de la función g;

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{\sqrt{(x-3)(x+3)}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0$$

indicando que la función g **no** posee asíntota vertical cuando $x \to 3^+$;

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x-3}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - {}^{3}\!/_{x}}{\sqrt{1 - \left({}^{3}\!/_{x}\right)^2}} = 1$$

por lo que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función g para $x \to \infty$.

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = \dfrac{18(x-1)}{x^2}$, halle:

a) (2 ptos.) $f'(x)$ y $f''(x)$

b) (2 ptos.) Intervalos de monotonía

c) (2 ptos.) Intervalos de concavidad

d) (3 ptos.) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, haga un bosquejo del gráfico de la función

e) (3 ptos.) Puntos críticos, valores extremos y puntos de inflexión

Solución: Derivando se obtiene

$$f'(x) = -18\,\frac{x-2}{x^3} = \left(\frac{18}{x^2}\right)\frac{2-x}{x} = \left(\frac{18}{x^2}\right)\left(\frac{2}{x}-1\right)$$

y derivando nuevamente

$$f''(x) = 36\,\frac{x-3}{x^4} = \left(\frac{36}{x^4}\right)(x-3)$$

La función f es continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por ser algebraica explícita. Luego, como

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,2) \quad \text{y} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(2,\infty)$$

entonces:

- f es creciente en $(0,2]$
- f es decreciente en $(-\infty,0)$ y en $[2,\infty)$

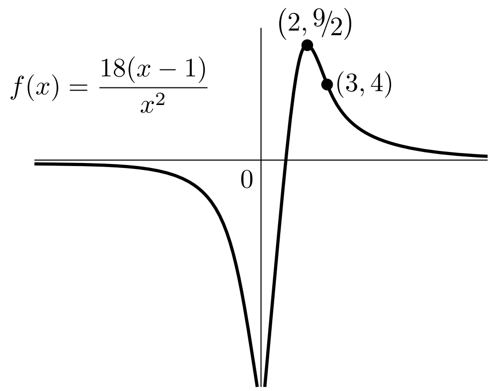
Por otra parte,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (3,\infty) \quad \text{y} \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(0,3)$$

entonces:

- f es cóncava hacia arriba en $[3,\infty)$
- f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$ y en $(0,3]$

Usando la información dada sobre el comportamiento asintótico de la función y notando que las distintas combinaciones de monotonía y concavidad ocurren en los intervalos $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$ y $(3,\infty)$, a continuación se muestra un bosquejo su gráfico.



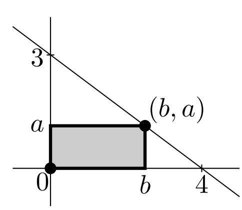
Finalmente,

- El único punto crítico ocurre en $x = 2$, el cual es estacionario;
- $f(2) = 9/2$ es el único valor extremo y es un máximo global;
- El punto $\big(3, f(3)\big) = (3, 4)$ el único punto de inflexión del gráfico.

Pregunta 5. (5 ptos.) Halle las dimensiones del rectángulo con mayor área inscrito entre los ejes de coordenadas y la recta $4y + 3x - 12 = 0$.

Solución: La región delimitada por los ejes coordenados y la recta $4y + 3x - 12 = 0$ es un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está ubicado en el origen y sus otros vértices son $(0, 3)$ y $(4, 0)$.

Estudiemos primero el caso en el cual uno de los vértices del rectángulo es el vértice del triángulo en donde está el ángulo recto.



Si denotamos la longitud de la base del rectángulo por b y la de su altura por a, entonces uno de sus vértices es el origen y el opuesto, (b, a), pertenece al segmento de la recta $4y+3x-12 = 0$ que está contenida en el primer cuadrante. Así, $4a+3b-12 = 0$ con $0 < b < 4$ y $0 < a < 3$.

El área del rectángulo, que denotaremos por A, se puede expresar como función de la altura o de la base. Si la expresamos como función de la altura entonces

$$A = A(a) = ba = \left(4 - \frac{4}{3}\,a\right)a \qquad \text{con } a \in (0,3)$$

Como $A'(a) = -\frac{8}{3}\,a + 4$, el único punto crítico (que es estacionario) ocurre en $a = {}^3\!/_2$. Además, como $A''(a) = -{}^8\!/_3 < 0$, estamos en presencia de un máximo global. Luego, $b = 4 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 2$.

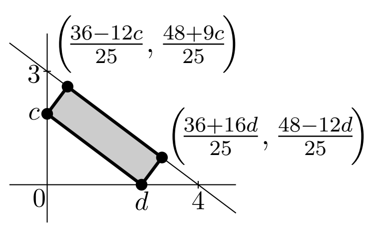
Por otra parte, si hubiésemos expresado el área como función de la base entonces

$$A = A(b) = ba = b\left(3 - \frac{3}{4}\,b\right) \qquad \text{con } b \in (0,4)$$

Como $A'(b) = -\frac{3}{2}\,b + 3$, el único punto crítico (que es estacionario) ocurre en $b = 2$. Además, como $A''(b) = -{}^3\!/_2 < 0$, estamos en presencia de un máximo global. Luego, $a = 3 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(2\right) = {}^3\!/_2$.

De cualquier forma, las dimensiones del rectángulo inscrito en el triángulo indicado y con uno de sus vértices en el origen para las cuales su área es la mayor posible son: 2 para su base y ${}^3\!/_2$ para su altura.

Estudiemos ahora el caso en el cual uno de los lados del rectángulo yace sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo.



Denotemos por d el valor de la abscisa del vértice del rectángulo cuya ordenada vale cero y por c el valor de la ordenada del vertice del rectángulo cuya abscisa vale cero. Luego, las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo vienen dados por las intersecciones de las rectas $y = \frac{4}{3}x + c$ e $y = \frac{4}{3}(x - d)$ con la recta $4y + 3x - 12 = 0$. Notemos que c y d cumplen la relación $4c = 3d$ pues el segmento que une los puntos $(0, c)$ y $(d, 0)$ es paralelo a la hipotenusa del triángulo rectángulo.

La base y la altura del rectángulo miden

$$\frac{5}{4}\,d = \frac{5}{3}\,c \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{5}(4-d) = \frac{4}{5}(3-c)$$

respectivamente, con $0 < d < 4$ y $0 < c < 3$.

El área del rectángulo, expresado como función de la coordenada d viene dado por

$$A = A(d) = \frac{3}{4}\,d\,(4-d) \qquad \text{con } d \in (0,4)$$

Como $A'(d) = \frac{3}{4}(4-2d)$, el único punto crítico (que es estacionario) ocurre en $d = 2$. Además, como $A''(d) = -3/2 < 0$, estamos en presencia de un máximo global. Luego, $c = \left(\frac{3}{4}\right)\left(2\right) = 3/2$.

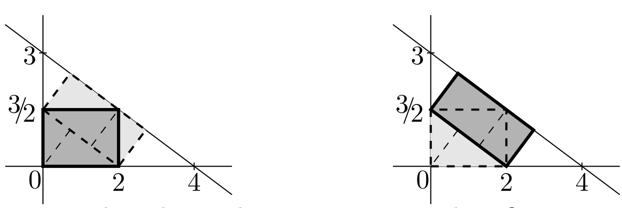
Por otra parte, si hubiésemos expresado el área como función de la coordenada c entonces

$$A(c) = \frac{4}{3}\,c\,(3-c) \qquad \text{con } c \in (0,3)$$

Como $A'(c) = \frac{4}{3}(3-2c)$, el único punto crítico (que es estacionario) ocurre en $c = 3/2$. Además, como $A''(c) = -8/3 < 0$, estamos en presencia de un máximo global. Luego, $d = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 2$.

De cualquier forma, las dimensiones del rectángulo inscrito en el triángulo indicado y con uno de sus lados sobre la hipotenusa para las cuales su área es la mayor posible son: $5/2$ para su base y $6/5$ para su altura.

Las dos soluciones producen rectángulos con la misma área; notemos que $\left(2\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{6}{5}\right)$ por lo cual, en ambos casos el área vale 2.



La relación entre las dos soluciones se puede afianzar en el hecho que los dos rectángulos en la ilustración anterior tienen la misma área.